Рассмотрено на Утверждаю

заседании ПЦК Зам. директор УР

общеобразовательных дисциплин Шагартаева А.Т.\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Протокол № \_\_\_\_ «\_\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2016 г. от «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_2016 г. Председатель ПЦК ООД

Курманова Ж.К \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

**по выполнению практических работ**

**по дисциплине ЕН.01 «Математика»**

**для студентов дневной формы обучения**

**по специальности**

**43.02.01 Организация обслуживания в общественном питании**

**Пояснительная записка.**

Согласно учебного плана и рабочей программы для специальности 43.02.01 Организация обслуживания в общественном питании предусмотрено 36 часа на проведение практических занятий. Настоящие материалы разработаны с учетом рабочей программы, составленной на основе федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) среднего профессионального образования. В процессе практического занятия согласно рабочей программы дисциплины «Математика», утвержденной ПЦК общепрофессиональных дисциплин и модулей, студенты выполняют практические занятия под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала. Выполнение студентами практических занятий направлено на: — обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний; — формирование умений применять полученные знания в практической деятельности; — развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений; — выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы. Практические занятия выполняются по следующим темам дисциплины «Математика»: **Раздел № 1 - Основные понятия и методы математического анализа.** **Раздел №2 - Дискретная математика.**

**Раздел №3 – Линейная алгебра.**

**Раздел № 4 – Теория комплексных чисел. Раздел № 5 – Теория вероятности и математическая статистика.**

Цель и задачи практических занятий: В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен уметь:

- применять математические знания и умения при решении задач профессиональной деятельности;

В результате освоения учебной дисциплины обучающийся должен знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

- основы теории вероятностей и математической статистики;

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков. Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «Математика», приобретение практических навыков решения примеров и задач. Выполнение практическойработы студенты производят в письменном виде. Практические занятия способствуют более глубокому пониманию теоретического материала учебного курса, а также развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих профессиональной компетентности студентов, пониманию межпредметных связей. Основой практикума выступают типовые задачи, которые должен уметь решать студент, изучающий дисциплину «Математика» и обучающихся по специальности «Экономика и бухгалтерский учет» . Для лучшего усвоения студентами изучаемого материала и получения уверенных навыков решения примеров и задач при проведении практических занятий целесообразно использовать различные методы и приемы: - рассмотрение решения типовых примеров; - исследовательская работа при решении примеров и практических задач; - работа в группах; - применение компьютерных программ для решения математических задач.

*Содержанием практических занятий являются*

— Выполнение вычислений, расчетов;

— Работа со справочниками, таблицами.

*Необходимые структурные элементы практического занятия:*

— Инструктаж, проводимый преподавателем;

— Самостоятельная деятельность студентов;

— Анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированных умений.

Перед выполнением практического занятия проводится проверка знаний студентов на предмет их готовности к выполнению задания.

Методические указания к выполнению практических работ содержат :

* Тему занятия;
* Цель занятия;
* Задачи;
* Обеспечение практической работы:
* Теоретические сведения и методические рекомендации

по решению задач.

* Пояснения (основные формулы, необходимые для выполнения практического занятия);
* Порядок выполнения занятия;
* Используемую литературу.

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине «Математика».

**Критерии оценки практических заданий.**

**Отметка «5»** ставится, если:

работа выполнена полностью;

в логических  рассуждениях и обосновании решения нет пробе­лов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможна одна неточ­ность, описка, не являющаяся следствием незнания или непо­нимания учебного материала).

**Отметка «4»** ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение

обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

**Отметка «3»** ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех

несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными

умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не

менее половины работы.

**Отметка «2»** ставится, если:

      допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет

      обязательными умениями по данной теме в полной мере.

**Отметка «1»** ставится, если:

работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и

умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена

не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой. К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным

выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

**ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ по предмету «Математика»**

**Практическое занятие № 1** Основные элементарные функции.

**Цель:**

1. Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Основные элементарные функции».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности учащихся.

**Порядок выполнения задания:**

1. Ответить на контрольные вопросы:

а) Что такое приращение аргумента и приращение функции?

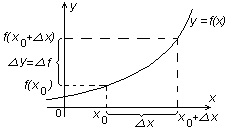
б) В чем состоит геометрический смысл приращений  и ?

в) В чем состоит геометрический смысл отношения ?

г) Сформулируйте определение производной функции в точке.

1. С помощью обучающих таблиц повторить планы вычисления приращения функции, производной функции в точке по определению и изучить образцы решенных примеров.
2. Выполнить задания для самоконтроля (в таблице).
3. Изучить условие заданий для практической работы.
4. Оформить отчет о работе.

# ОБУЧАЮЩИЕ ТАБЛИЦЫ



**1. Приращение аргумента и приращение функции.**

На рисунке  - приращение аргумента в точке ,  - приращение функции в точке .

*Задание*. Вычислите приращение функции  в произвольной точке, если:

а) ; б) .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | План вычисления приращения | Применение | плана |
| шага | функции | а) | б) |
| 1 | Фиксируем произвольное значение аргумента  и находим значение функции | , | , |
| 2 | Задаем приращение  и находим значение функции | ,      . | , |
| 3 | Находим приращение функции: |  |  |

*Примеры1*. Вычислите приращение функции  в произвольной точке *х*0, если:

1. ; 2) ; 3) ; 4) ; 5) ; 6) ; 7) ; 8) ; 9) .

**2. Производная функции.**

*Определение*. Производной функции  в заданной точке *x* называется предел отношения приращения функции  в этой точке к приращению аргумента , когда  стремится к нулю, т.е.

.

*Задание*. Вычислите производную функции  в точке , если:

а) ; б) .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № | План вычисления производной | Применение | плана |
| шага | функции | а) | б) |
| 1 | Фиксируем точку *x* и даем аргументу приращение |  |  |
| 2 | Вычисляем приращение функции |  |  |
| 3 | Находим отношение приращения функции к приращению аргумента: |  |  |
| 4 | Вычисляем производную |  |  |
| 5 | Вычисляем |  |  |

**Пракетическое занятия.**

Вариант 1.

1. Найдите приращение функции *f* в точке , если .
2. Найдите приращения  и  в точке , если .
3. Найдите производную функции *f* в точке  по определению, если  при = 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону , в момент времени , если .

Вариант 2.

1. Найдите приращение функции *f* в точке , если .
2. Найдите приращения  и  в точке , если .
3. Найдите производную функции *f* в точке  по определению, если  при = 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону , в момент времени , если .

Вариант 3.

1. Найдите приращение функции *f* в точке , если .
2. Найдите приращения  и  в точке , если .
3. Найдите производную функции *f* в точке  по определению, если  при = 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону , в момент времени , если .

Вариант 4.

1. Найдите приращение функции *f* в точке , если .
2. Найдите приращения  и  в точке , если .
3. Найдите производную функции *f* в точке  по определению, если  при = 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону , в момент времени , если .

**Практическое занятие № 2** Непрерывность функции. Точки разрыва функции

**Цель работы.** Формирование практических умений раскрытия неопределенностей с помощью замечательных пределов, умений работать со справочниками по математике, развитие интеллектуальных умений.

Содержание работы:

**1. Предел функции в точке и на бесконечности**

Самым фундаментальным понятием математического анализа является понятие предела функции. Так случилось в математическом познании человечеством природы, что основные понятия математического анализа – производная, интеграл, ряд и др. – были открыты в XXVII веке, а вот строгое обоснование этих понятий спустя 150 лет на основе понятия предела. Это понятие будет сопровождать Вас на протяжении всего Вашего математического образования, поэтому очень важно с первого занятия освоить это понятие.

Различают – предел функции в точке и предел функции на бесконечности. Сначала рассмотрим предел функции в точке, т.е. при.

С одной стороны это понятие может оказаться простым и очевидным.

Пусть дана функция f(x) = x2 + x и известно, что , т.е. принимает значения достаточные близкие к 2. Очевидно, что f(x) будет принимать значения близкие к 6, т.е. f(2).

При этом пишут , или в общем виде:

|  |
| --- |
|  |

И читают: предел функции *f(x)* в точке *a* (или при *х* стремящемся к *а*) равен b. (Никогда не говорите «лим» или «лимит»!)

Но не все так просто! Рассмотрим функцию: . Очевидно, что эта функция существует при всех действительных *х*,

кроме *х* = 1 – обратите на это особое внимание!

Пусть теперь слева или справа. Составим таблицу значений.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0,9 | 0,99 | 0,999 | 0,9999 | 0,99999 | 0,999999 |
| *f(x)* | 4,9 | 4,99 | 4,999 | 4,9999 | 4,99999 | 4,999999 |

Очевидно, что *f(x)* стремится к 5. А если *х* будет стремиться к 1 справа?

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *X* | 1,1 | 1,01 | 1,001 | 1,0001 | 1,00001 | 1,000001 |
| *f(x)* | 5,1 | 5,01 | 5,001 | 5,0001 | 5,00001 | 5,000001 |

Как видим, и в этом случае . Вот так, а *f(1)* не существует!

Дадим строгое определение предела функции в точке, это определение одно из нескольких и называют определением «*на языке ε – δ*» или определением по Коши.

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки х = а, кроме, быть может, в самой этой точке.

**Определение**

|  |
| --- |
| *Число b называется пределом этой функции в точке х = а*  *(или при), если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу*  *ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех х удовлетворяющих неравенству 0 <‌ ‌‌, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: ‌ ‌‌.* |

Сформулируем определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция *y = f(x)* определена при достаточно больших *х*

(при ).

**Определение**

|  |
| --- |
| *Число b называется пределом этой функции при, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое значение аргумента х = М, что для всех х > М соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: ‌ ‌‌. (или соответствующие значения функции будут принадлежать интервалу ‌ ‌‌)* |

Сформулируем некоторые свойства пределов, которые используют для решения задач.

**Задание 1.** Выпишите таблицу в тетради, самостоятельно заполнив пропущенные ячейки в правой части таблицы словесной формулировкой свойства.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1 |  | постоянный множитель можно выносить за знак предела |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  | предел многочлена при равен значению многочлена в точке *х = а*. |
| 6 |  | предел дробно-рациональной функции равен значению этой функции, если предел знаменателя отличен от нуля |
| 7 |  | предел от сложной функции *f(U(x))* равен функции *f* от предела функции *U(x).* |

1. Вычисления пределов в точке

Умение находить пределы функций – необходимое условие для дальнейшего успешного изучения математического анализа. Это умение базируется на свойствах пределов (повторите их) и умений в преобразовании алгебраических выражений.

Упрощенно, на первых шагах освоения техники вычисления пределов, будем считать, что **если функция существует в точке *x = a*, то ее предел равен значению функции в этой точке *f(a).***

**Пример 1.**





Теперь рассмотрим наиболее популярный вид – пределы дробно-рациональных функций.

Итак, если знаменатель такой функции отличен от нуля, то функция существует в точке, то ее предел равен ее значению в этой точке. 

**Если же функция в точке х = а не существует, *в знаменателе дроби ноль,*** то вычисляем значение числителя в этой точке. При этом, возможны два варианта:

**1.Если числитель отличен от нуля**, то предел не существует и пишут знак бесконечности.

**Пример 2**



**2. Если и в знаменателе и в числителе нули,** то имеем неопределенность вида .

Методика раскрытия таких неопределенностей проста. Если числитель и знаменатель дробно-рациональной функции при *х = а,* равны нулю, то разложение на множители и числителя и знаменателя обязательно содержат сомножитель *(х – а)*, на который дробь будет сокращена. Покажем на примере.

**Пример 3.**

**а)** (выяснили, что при *х = 1* и числитель и знаменатель равны нулю, значит имеем неопределенность вида , раскладываем числитель и знаменатель на множители, уже зная один из сомножителей

*(х – 1)*, второй сомножитель для квадратного трехчлена нетрудно подобрать устно, не используя известную школьную методику разложения квадратного трехчлена на линейные множители)

= .

Такова методика, которую необходимо четко усвоить. Еще примеры.

**б)**;

**в)**;

**Задание 2.** Заполните таблицу в тетради.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вычисление предела в точке дробно-рациональной функции** | | |
| Анализ значений знаменателя дроби | Анализ значений числителя дроби | Способ вычисления предела |
| 1. Знаменатель дроби не равен нулю | Значение числителя не важно |  |
| 2.Знаменатель дроби равен нулю | Числитель дроби не равен нулю |  |
| Числитель дроби равен нулю |  |

**Задание 3.** Используя таблицу, вычислить следующие пределы.

1.  2.  3. 

4. ; 5.; 6.

**Практическое занятие № 3.** Производные простейших функций.

**Цели:**

* Повторить, обобщить и систематизировать знания о производной.
* Закрепить навыки нахождения производных.
* Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Практическая часть**

* + 1. Используя таблицу производных, правила дифференцирования суммы, произведения и частного элементарных функций, найти производные следующих функций:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **1.3** | **1.5** |
| **1.2** | **1.4** | **1.6** |

2. Вычислить частное значение производной.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.3** | **2.5** |
| **2.2** | **2.4** | **2.6** |

**Практическое занятие № 4.**

**Тема**: Основные теоремы дифференциального исчисления. **Цель**: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная функция. Закрепить навык нахождения производной и дифференциалов высшего порядка.

**Обеспечение практического занятия:** Теоретический материал методической рекомендации к практической работе. Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012. Индивидуальные карточки с вариантом практической работы. ***Задачи:*** • развитие творческого профессионального мышления; • познавательная мотивация; • овладение языком науки, навыки оперирования понятиями; • овладение умениями и навыками постановки и решения задач; • углубление теоретической и практической подготовки; • развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.»

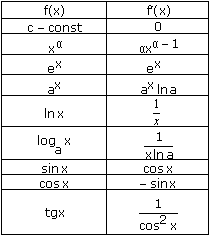
**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу.

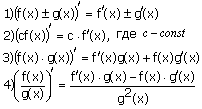
**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретический материал и примеры нахождения производной элементарных функций, сложной функции, производных и дифференциалов высших порядков**

**Определение:** Производной функции f(x) (f'(x0)) в точке x0  называется число, к которому стремится разностное отношение 1, стремящемся к нулю. **Производные элементарных функций.**



**Правила дифференцирования.** Если у функций  f(x) и  g(x) существуют производные, то



**Производная сложной функции** Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

**Теорема 7.3.1.** Пусть задана сложная функция *$z=F(x)=f(\varphi(x))$*;функция *$\varphi$*имеет производную в точке *$x_0$*, а функция *$f$*имеет производную в точке *$y_0 = \varphi(x_0)$*.Тогда функция *$F$*имеет производную в точке *$x_0$*и \begin{displaymath}
F^{'}(x_0)=f^{'}(y_0)\varphi^{'}(x_0).
\end{displaymath}

**Пример.** $z=F(x)= e^{\sin x},$ \begin{displaymath}
\ F(x)=f(\varphi(x)),\ z= e^y
= f(y),\
y = \varphi(x) = \sin x.
\end{displaymath}

Тогда \begin{displaymath}
F^{'}(x)=e^y(\sin x)^{'}=e^{\sin x}\cos x.
\end{displaymath}

**Пример.** Найдем дифференциал функции $z=\arcsin \ln(x^2+a^2)$:

\begin{eqnarray*}
dz &=& \frac{d\ln(x^2+a^2)}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}}=\\
&=&\f...
...2+a^2)}=\\
&=&\frac{2xdx}{\sqrt{1-\ln^2(x^2+a^2)}\,(x^2+a^2)}.
\end{eqnarray*}

Производные высших порядков

Если функция $ f(x)$дифференцируема при всех $ x\in(a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $ f':(a;b)\to\mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке $ x$значение производной $ f'(x)$. Эта функция $ f'$называется производной функции $ f$, или первой производной от $ f$. (Иногда саму исходную функцию $ f$называют нулевой производной и обозначают тогда $ f^{(0)}$.) Функция $ g_1(x)=f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках $ x$интервала $ (a;b)$, которую мы обозначим $ g_1'(x)=f''(x)$и назовём второй производной функции $ f(x)$. Если предположить, что вторая производная $ g_2(x)=f''(x)$существует во всех точках $ x\in(a;b)$, то она может также иметь производную $ g_2'(x)=f'''(x)$, называемую третьей производной функции $ f(x)$, и т. д. Вообще, *$ n$*-й производной функции $ f(x)$называется производная от предыдущей, $ (n-1)$-й производной $ g_{n-1}(x)=f^{(n-1)}(x)$:

$\displaystyle f^{(n)}(x)=g'_{n-1}(x)=(f^{(n-1)}(x))',$

если эта производная существует. $ n$-я производная называется также производной *$ n$*-го порядка, а её номер $ n$называется порядком производной.

При $ n=1;2;3$первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами:

$ f'(x),f''(x),f'''(x)$или $ y',y'',y'''$; при прочих $ n$ -- числом в скобках в верхнем индексе: $ f^{(4)}(x),f^{(5)}(x),\dots$или $ y^{(4)},y^{(5)},\dots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $ f'(x)$задаёт мгновенную скорость изменения значений $ f(x)$в момент времени $ x$, то вторая производная, то есть производная от $ f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть ускорение значений $ f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $ (f''(x))'=(f'(x))''$). **Пример 1.**   Найдём вторую производную функции $ f(x)=\sin^3x$. Первая производная равна $\displaystyle f'(x)=(\sin^3x)'=3\sin^2x\cos x;$ далее находим

$\displaystyle f''(x)=3(\sin^2x\cos x)'=3(2\sin x\cos^2x-\sin^3x)=3\sin x(2\cos^2x-\sin^2x).$

**Пример 2.**   Пусть $ y=f(x)=e^{kx}$. Тогда

$\displaystyle y'=e^{kx}\cdot k=ke^{kx};
y''=k(e^{kx})'=ke^{kx}\cdot k=k^2e^{kx}; \dots; y^{(n)}=k^ne^{kx}; \dots.$

При $ k=1$все производные оказываются равными исходной функции: $ (e^x)^{(n)}=e^x.$

***Дифференциалы высших порядков.***

Напомним, что дифференциал функции $ f(x)$(называемый также первым дифференциалом, или дифференциалом первого порядка) задаётся формулой $\displaystyle df(x;dx)=f'(x)dx.$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении $ dx$аргумента $ x$) как функцию переменного $ x$и найдём её дифференциал $ d(df(x;dx))=d^2f(x;dx)$:

$\displaystyle d^2f(x;dx)=(f'(x)dx)'dx=f''(x)(dx)^2.$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется вторым дифференциалом от функции $ f(x)$, или дифференциалом второго порядка. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется третьим дифференциалом; он задаётся формулой

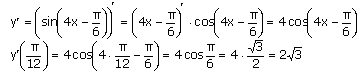
$\displaystyle d^3f(x;dx)=(f''(x)(dx)^2)'dx=f'''(x)(dx)^3.$

Вообще, *$ n$*-й дифференциал $ d^nf(x;dx)$, или дифференциал *$ n$*-го порядка, определяется как дифференциал от $ (n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении $ dx$); для него имеет место формула:

$\displaystyle d^nf(x;dx)=f^{(n)}(x)(dx)^n.$

**Примеры.** 1. Найти значение производной функции 8

**Решение.** Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

**Ответ:**10.

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.
4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

**Самостоятельная работа.**

**Вариант – 1.**

1. Найдите производную следующих функций:

а) б) в)

г) д) ; е)

ж) з)

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) ; б) в)

**Вариант – 2.**

1. Найдите производную следующих функций:

а) б) ; в)

г) д) ; е)

ж) з)

1. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

a) б) в)

**Практическое занятие № 5.**

**Тема**: Неопределенный интеграл.

**Цель:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Неопределенный интеграл.».
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.
4. **Необходимый теоретический материал**

Функция F(x) называется первообразной функции f(x), если функция f(x) является производной функции F(x).

У одной и той же функции f(x) много первообразных. Если F(x) - первообразная функции f(x) , то и любая функция F(x)+C , где C - число, является первообразной той же функции.

Неопределенным интегралом функции f(x) называется множество первообразных этой функции.

Неопределенный интеграл функции f(x) обозначается символом .

причем f(x) называется ***подынтегральной функцией***,   
f(x)dx — ***подынтегральным выражением***,   
x — ***переменной  интегрирования***,   
∫ — ***знаком неопределенного интеграла***.   
Таким образом, по определению   
если F'(x)=f(x).

Чтобы найти интеграл от данной функции, нужно найти любую ее первообразную и прибавить к ней произвольное число C. Так, , и т. д.

На основании свойств производной можно сформулировать свойства **неопределенного интеграла** (свойства первообразной).

1. Производная результата интегрирования равна подынтегральной функции:
2. Неопределенный интеграл производной функции равен сумме самой функции и произвольной константы:
3. Коэффициент можно выносить за знак неопределенного интеграла:

, где k – произвольная константа.

1. Неопределенный интеграл суммы/разности функций равен сумме/разности неопределенных интегралов функций:

* первое свойство позволяет проводить проверку интегрирования. Чтобы проверить правильность выполненного интегрирования достаточно вычислить производную полученного результата. Если полученная в результате дифференцирования функция окажется равной подынтегральной функции, то это будет означать, что интегрирование проведено верно;
* второе свойство неопределенного интеграла позволяет по известному дифференциалу функции найти ее первообразную. На этом свойстве основано непосредственное вычисление неопределенных интегралов.

1. **Примеры**

**Пример1.** Выясните, является ли  первообразной для функции  на ***R***?

**Решение.** Находим

.

Следовательно, по определению  является первообразной для функции  на ***R***.

**Пример2.**  Для функции  найдите первообразную, график которой проходит через точку .

**Решение.**  По основному свойству первообразных любая первообразная функции  записывается в виде . Координаты точки  графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

.

Отсюда находим, что

,

*С* = 2.

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: .

**3. Задания к практической работе**

* 1. **вариант**

1. Является ли функция  первообразной для функции  на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции .
3. Для функции  найдите первообразную, график которой проходит через точку .
4. Найдите неопределённый интеграл: а); б) dx.
   1. **вариант**
5. Является ли функция  первообразной для функции  на ***R***?
6. а) Найдите общий вид первообразных для функции .
7. Для функции  найдите первообразную, график которой проходит через точку .
8. Найдите неопределённый интеграл: а); б)

**3 вариант**

1. Является ли функция  первообразной для функции  на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции .
3. Для функции  найдите первообразную, график которой проходит через точку .
4. Найдите неопределённый интеграл: а); б)

**4вариант**

1. Является ли функция  первообразной для функции  на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции .
3. Для функции  найдите первообразную, график которой проходит через точку .
4. Найдите неопределённый интеграл: а); б)

**Практическое занятие № 6.**

**Тема**: Решение задач профессиональной деятельности

**Цель**: Проверить на практике понятие определённого интеграла, умение вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Умение вычислять площадь фигур с помощью определенных интегралов. Закрепление умений и навыков решения прикладных задач с помощью определённого интеграла.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.»

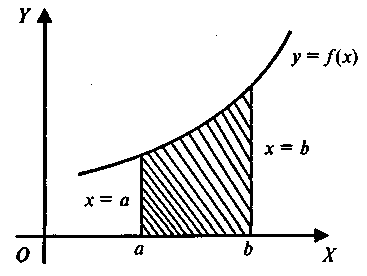
**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

***Теоретический материал и примеры вычисления определённого интеграла.***

*Геометрический смысл определённого интеграла*



Площадь фигуры, ограниченной кривой *y = f (x)*, где *f (x) > 0* , осью *OX* и двумя прямыми *x = a* и *x = b* (рис. 1), выражается определённым интегралом: ******

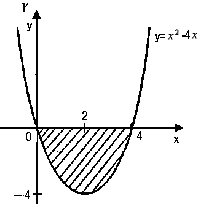
*Примеры***:**

1. Определить площадь *S* фигуры, заключённой между ветвью кривой *y = x2*, осью *OX* и прямыми  *x = 0, x = 3* (рис.2).

Решение: ******



2) Найти площадь *S* фигуры, заключённой между осью *OX* и кривой *y = x2 – 4x* (рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой *y = x2 – 4x* с осью OX:

*y = 0;  x2 – 4x = 0  x ( x – 4 ) = 0;  x1 = 0* или *x2 = 4.*

Найдём производную функции *y’ = 2x – 4,*  и точки экстремума:

*y’ = 0 *  *2x – 4 = 0;  x = 2; y” = 2 > 0;  x = 2* – точка *min; y(2) = - 4.*

Искомая площадь ограничена сверху осью *OX* , снизу графиком функции *y = x2 – 4x*, слева прямой *x = 0*, справа прямой *x = 4*. Так как на отрезке ** *y < 0*, то

 *(кв.ед.)*

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями *y = x3 , x = -1. x = 2* и осью *OX*

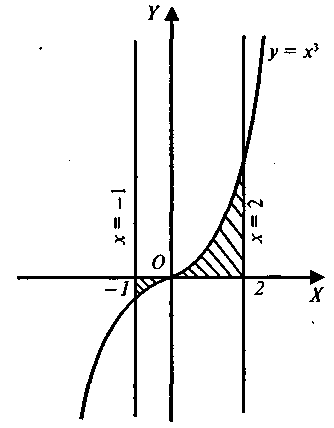


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции  с осью ОХ(см. рис 4):

*y = x3; y = 0  x = 0;* Вычислим производную функции:  *y’ = 3x2; y’ = 0  x = 0.* Найдем значение второй производной в точке *х=0: y” = 6x; y” (0) = 0.* Вычислим  *y”(-1) = -=6;  y”(1) = 6; * Т.к*. y”* меняет знак при переходе через *х =0* ** т. *(0;0)*  – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

 *(кв.ед.)*

**3. Расчетно-графическая работа**

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

**Вариант – 1.**

1. ;

**Вариант – 2.**

1. ;

**Вариант – 3.**

1. ;

**Вариант – 4.**

1. .
2. ;

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что такое определенный интеграл?

2. Что в записи означают: а) числа ; б) ; в) ; г) ?

3. Зависит ли приращение от выбора первообразной?

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

**Практическое занятие № 7**. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

**Цели:**

* Изучить виды простых дифференциальных уравнений.
* Овладеть навыками решения дифференциальных уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
* Изучить задачу Коши.
* Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Литература:** Лисичкин В.Т., Соловейчик И.Л. Математика: Учеб. Пособие для техникумов. – М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.: ил.

**Теоретическая часть.**

**Дифференциальное уравнение** первого порядка, **содержит**:   
1) независимую переменную x;  
2) зависимую переменную  y (функцию);  
3) первую производную функции y ‘ .

**Что значит решить дифференциальное уравнение?**Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций**http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image020.gif, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image022.gifПример 1 Решить дифференциальное уравнение

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image024.gifВ первую очередь нужно переписать производную немного в другом виде. Вспоминаем обозначение производной:

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image026.gifИтак, на первом этапе переписываем производную в нужном нам виде:

На втором этапе **всегда** смотрим, нельзя ли **разделить переменные?** Что значит разделить переменные? Грубо говоря, **в левой части** нам нужно оставить **только «игреки»**, а **в правой части** организовать **только «иксы»**. Разделение переменных выполняется с помощью «школьных» манипуляций: вынесение за скобки, перенос слагаемых из части в часть со сменой знака, перенос множителей из части в часть по правилу пропорции и т.п.

Дифференциалы   *dy* и  *dx* – это полноправные множители.

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image032.gifВ рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:  
Переменные разделены.

В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image034.gifСледующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения**. Всё просто, навешиваем интегралы на обе части:

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image036.gifРазумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные:

К любой первообразной приписывается константа. Здесь два интеграла, но константу   достаточно записать один раз. Почти всегда её приписывают в правой части.

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image036_0000.gifСтрого говоря, после того, как взяты интегралы, дифференциальное уравнение считается решенным. Единственное, у нас «игрек» не выражен через «икс», то есть решение представлено в неявном виде.  Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть,  – это общий интеграл.

Пример 2

Найти частное решение дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image073.gif, удовлетворяющее начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075.gif

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется задачей Коши.

Сначала находим общее решение. Переписываем производную в нужном виде:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image077.gif

Очевидно, что переменные можно разделить:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image079.gif

Интегрируем уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image081.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image083.gif

Общий интеграл получен. Теперь пробуем общий интеграл преобразовать в общее решение (выразить «игрек» в явном виде). Вспоминаем определение логарифма : http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image085.gif. В данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image087.gif

Используя свойство степеней, перепишем функцию следующим образом:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image089.gif

Если http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image091.gif – это константа, то http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image093.gif – тоже некоторая константа, которую обозначим через букву http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image038_0002.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image096.gif  
Итак, общее решение: http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image098.gif.

На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075_0000.gif.

Необходимо подобрать **такое** значение константы http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image038_0002.gif, чтобы выполнялось заданное начальное условие http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075_0000.gif.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image101.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image103.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image105.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image109.gifТо есть, http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image107.gif

Итак,

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image112.gifhttp://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image107_0000.gifВ общее решение http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image096_0000.gif подставляем найденное значение константы:  
 – это и есть нужное нам частное решение.

**Практическая часть.**

**Решить дифференциальные уравнения с разделёнными переменными**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **1.6** | **1.11** |
| **1.2** | **1.7** | **1.12** |
| **1.3** | **1.8** | **1.13** |
| **1.4** | **1.9** | **1.14** |
| **1.5** | **1.10** | **1.15** |

**2. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **2.1** | **2.6** | **2.11** |
| **2.2** | **2.7** | **2.12** |
| **2.3** | **2.8** | **2.13** |
| **2.4** | **2.9** | **2.14** |
| **2.5** | **2.10** | **2.15** |

**Практическое занятие № 8**

**Тема**: Решение дифференциальных уравнений I-го порядка.  
**Цель**: Проверить на практике знание понятия дифференциального уравнения, виды дифференциальных уравнений, умение решать дифференциальные уравнения I порядков, находить общее и частное решение.  
**Обеспечение практической работы:**  
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Практические задания по вариантам.

**Ход работы**:

***Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений.***

**1. Дифференциальное уравнение** *первого порядка*, **содержит**:   
1) независимую переменную http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image010.gif;  
2) зависимую переменную http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image012.gif (функцию);  
3) первую производную функции: http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image014.gif.

Решить дифференциальное уравнение – это значит, найти **множество функций**http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image020.gif, которые удовлетворяют данному уравнению. Такое множество функций называется **общим решением дифференциального уравнения**.

**Пример 1**

Решить дифференциальное уравнение http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image022.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image024.gif.

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image026.gif

В рассматриваемом примере переменные легко разделяются перекидыванием множителей по правилу пропорции:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image032.gif

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Следующий этап – **интегрирование дифференциального уравнения.**  Интегрируем обе части:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image034.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image036.gif

Решение дифференциального уравнения в неявном виде называется **общим интегралом дифференциального уравнения**. То есть, http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image036_0000.gif – это общий интеграл.

**Вместо**записи http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image036_0001.gif обычно пишут http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image041.gif.

В данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image048.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image050.gif

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Множество функций http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image052.gif является общим решением дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image022_0000.gif.

Придавая константе http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image038_0001.gif различные значения, можно получить бесконечно много **частных решений** дифференциального уравнения.

**Пример 2**

Найти частное решение дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image073.gif, удовлетворяющее начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075.gif

По условию требуется найти **частное решение** ДУ, удовлетворяющее начальному условию. Такая постановка вопроса также называется *задачей Коши*.

Сначала находим общее решение.

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image077.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image079.gif

Интегрируем уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image081.gif  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image083.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image087.gif

http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image089.gif

Итак, общее решение: http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image098.gif. На завершающем этапе нужно найти частное решение, удовлетворяющее заданному начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075_0000.gif.

Необходимо подобрать **такое** значение константы http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image038_0002.gif, чтобы выполнялось заданное начальное условие http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075_0000.gif.

В общее решение вместо «икса» подставляем ноль, а вместо «игрека» двойку:  
  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image109.gif

В общее решение http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image096_0000.gif подставляем найденное значение константы http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image107_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image112.gif – это и есть нужное нам частное решение.

**2.Линейные дифференциальные уравнения второго порядка   
с постоянными коэффициентами**

В теории  и практике различают два типа таких уравнений – **однородное уравнение** и **неоднородное уравнение**.

**Однородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами** имеет следующий вид:

http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image017.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image019.gif и http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image021.gif – константы (числа), а в правой части – **строго** ноль.

[**Неоднородное ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами**](http://www.mathprofi.ru/kak_reshit_neodnorodnoe_uravnenie_vtorogo_poryadka.html)имеет вид:  
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image023.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image019_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image021_0000.gif – константы, а http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image025.gif – функция, зависящая *только от «икс»*. В простейшем случае функция http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image025_0000.gif может быть числом, *отличным от нуля*.

Какая мысль приходит в голову после беглого взгляда? Неоднородное уравнение кажется сложнее. На этот раз первое впечатление не подводит!

Кроме того, чтобы научиться решать неоднородные уравнения **необходимо** уметь решать однородные уравнения. По этой причине сначала рассмотрим алгоритм решения линейного однородного уравнения второго порядка:  
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image027.gif

Для того чтобы решить данное ДУ, нужно составить так называемое *характеристическое уравнение*:  
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image029.gif

По какому принципу составлено характеристическое уравнение, отчётливо видно:   
вместо второй производной записываем http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image031.gif;  
вместо первой производной записываем просто «лямбду»;  
вместо функции http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image033.gif ничего не записываем.

http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image029_0000.gif – это **обычное квадратное уравнение**, которое предстоит решить.

Существуют три варианта развития событий.   
Они доказаны в курсе математического анализа, и на практике мы будет использовать готовые формулы.

**Характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня**

Если характеристическое уравнение http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image029_0001.gif имеет два **различных** действительных корня http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image036.gif, http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image038.gif (т.е., если дискриминант http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image040.gif), то общее решение однородного уравнения выглядит так:   
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image042.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image044.gif – константы.

В случае если один из корней равен нулю, решение очевидным образом упрощается; пусть, например, http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image046.gif, тогда общее решение: http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image048.gif

**Пример 5**

Решить дифференциальное уравнение http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image050.gif

**Решение:** составим и решим характеристическое уравнение:  
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image052.gif  
http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image054.gif

http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image056.gif, http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image058.gif

http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image042_0000.gif

**Ответ:** общее решение: http://www.mathprofi.ru/h/differencialnye_uravnenija_vtorogo_poryadka_clip_image060.gif

***Практическое задание:***  
**Вариант 1**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения к разделяющимися переменными.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

**Вариант 2**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения c разделяющимися переменными.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

3.Найти решение однородного дифференциального уравнения первого порядка.

4. Найти общее решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка.

**Практическое занятие № 9** Решение задач по теме «Множества»

***Контрольные вопросы.***

1. Приведите примеры конечных и бесконечных множеств.

1. Перечислите способы задания множеств.
2. Назовите несколько подмножеств

а) множества натуральных чисел; б) множества геометрических фигур.

4. Какие множества называются равными? Какие из следующих множеств геометрических фигур на плоскости равны между собой:

A – множество всех квадратов;

B - множество всех прямоугольников;

C - множество всех четырехугольников с прямыми углами;

D - множество всех прямоугольников с равными сторонами;

F - множество всех ромбов с прямыми углами?

5. Перечислите основные операции над множествами. Для каждой операции сформулируйте определение и приведите простые примеры.

***Упражнения.***

1. Запишите множество *A*, элементами которого являются натуральные делители числа 24, используя перечисление элементов множеств.

2. Даны множества: *A={а, и, о, у, э, ы},* *B={111, 222, 333, 444, 555,* *666, 777, 888, 999}, C={0, 2, 4, 6, 8}*. Задайте каждое из них описанием характеристического свойства.

1. Даны числа: *19; ; 0; -27; 5,4.* Какие из них принадлежат множеству: а) целых чисел; б) целых неотрицательных чисел; в) рациональных чисел; г) действительных чисел?
2. Изобразите на координатной прямой множество Х, если
3. Х = {x⏐x∈R, -2 ≤ x ≤ 7};
4. Х = {x⏐x∈Z, -1 < x < 3};
5. Х = {x⏐x∈N, -2 < x ≤ 3}.
6. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства: .
7. Найдите множество решений уравнения, используя формулу для расстояния между двумя точками координатной прямой: а) **; б) .
8. Дано множество *A={72, 56, 513, 117, 324}.* Составьте подмножества данного множества, состоящие из чисел, которые:

а) делятся на 4;

б) делятся на 9;

в) делятся на 5;

г) не делятся на 10.

1. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества P и Qi, если P – множество равнобедренных треугольников,

а) Q1 – множество остроугольных треугольников;

б) Q2 – множество прямоугольных треугольников;

в) Q3 – множество равносторонних треугольников.

Изобразите все четыре множества на одном чертеже.

1. Пусть *A*- множество натуральных чисел, запись которых оканчивается 0, *B* - множество натуральных чисел, кратных *10*. Докажите, что множества *A* и *B* равны.
2. Известно, что N множество натуральных чисел, Z – множество целых чисел. Докажите, что высказывание Z ⊂ N − ложно.

11. Изобразите при помощи кругов Эйлера множества A, B и C, если:

а) А − множество четных целых чисел,

B − множество целых чисел, кратных 4;

b) А − множество четных целых чисел,

В − множество целых чисел, кратных 2;

с) А − множество нечетных целых чисел,

В − множество целых чисел, кратных 3,

С − множество чисел, кратных 5.

1. Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на рисунке. Покажите каждое из множеств.

А

C

В

А D

F

Рис. 1

1. Установите, в каком отношении находятся множества А и В, если А = {a, b, c, d}, а множество В:

а) {k, l, m}; b) {b, c, o, f, k}; с) {b, d}.

**Практическое занятие № 10.**

**Тема: Выполнить действия над матрицами.**

**Цель:** Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

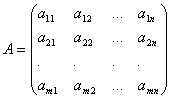
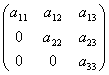
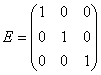
**›** Выполнить самостоятельную работу.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

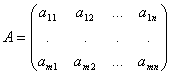
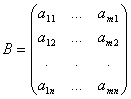
**Теоретические сведения и методические рекомендации**

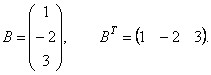
**по решению задач.**

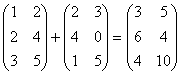
*Матрицей размером m*×*n* называется совокупность *m·n* чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из *m* строк и *n* столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

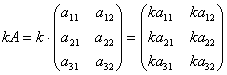
Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, *А* или *В*. В общем виде матрицу размером *m*×*n* записывают так . Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами *aij*: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, *a23* – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце. Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1. Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья. Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец. Матрица, у которой всего одна строка http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image006.gif, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например, http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image008.gif. *Главной диагональю* квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.  Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей. . Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, или http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image016.gif. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой E. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид .

**ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.**

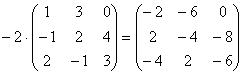
**Равенство матриц**. Две матрицы *A* и *B* называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны *aij* = *bij*. Так если http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image020.gifи http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image022.gif, то *A=B*, если *a11 = b11, a12 = b12, a21 = b21* и *a22 = b22*. **Транспонирование**. Рассмотрим произвольную матрицу *A* из *m* строк и *n* столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу *B* из *n* строк и *m* столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы *A* с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы *A* с тем же номером). Итак, если , то . Эту матрицу *B* называют *транспонированной* матрицей *A*, а переход от *A* к *B транспонированием*. Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице *A*, обычно обозначают *AT*. Связь между матрицей *A* и её транспонированной можно записать в виде http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image028.gif. **Пример.** Найти матрицу, транспонированную данной.

1.  2. 

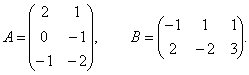
**Сложение матриц.** Пусть матрицы *A* и *B* состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, которая определяется по правилу, например, http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image034.gif или http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image036.gif **Примеры.** Найти сумму матриц: .

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image040.gif- нельзя, т.к. размеры матриц различны.
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image042.gif. Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному *A+B=B+A* и ассоциативному (*A+B*)+*C*=*A*+(*B+C*). **Умножение матрицы на число.** Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы *A* на число *k* есть новая матрица, которая определяется по правилу или http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image046.gif. Для любых чисел *a* и *b* и матриц *A* и *B* выполняются равенства:
3. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image048.gif 2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image050.gif 3. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image052.gif.

**Примеры.**

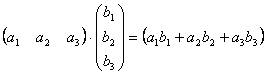
1. .
2. Найти 2A-B, если http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image056.gif, http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image058.gif.

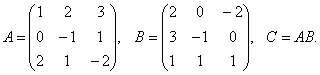
http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image060.gif.

1.  Найти *C*=–3*A*+4*B*. Матрицу *C* найти нельзя, т.к. матрицы *A* и *B* имеют разные размеры. **Умножение матриц.** Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы *A* не матрицу *B* называется новая матрица *C=AB*, элементы которой составляются следующим образом:

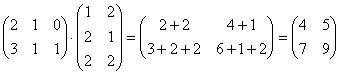
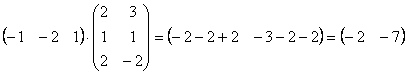
http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image064.gif.

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице *C*) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце *c13*, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы. В общем случае, если мы умножаем матрицу *A = (aij)* размера *m*×*n* на матрицу *B = (bij)* размера *n*×*p*, то получим матрицу *C* размера *m*×*p*, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент *cij* получается в результате произведения элементов *i*-ой строки матрицы *A* на соответствующие элементы *j*-го столбца матрицы *B* и их сложения. Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат. Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

. **Примеры.**

1. Пусть 

Найти элементы *c12*, *c23* и *c21* матрицы *C*. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image070.gif

1. Найти произведение матриц. .
2. .
3. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image076.gif- нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.
4. Пусть http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image078.gif

Найти *АВ* и *ВА*.

http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image080.gif

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image082.gif Найти *АВ* и *ВА*. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image084.gif, *B·A* – не имеет смысла.

**Задания для совместной работы.**

1. Найдите матрицу C = A + B, если A = , B = .
2. Найдите матрицу C = A + B, если A = , B = .
3. Вычислите: 2A + 3B – C, если А = , В = , С =
4. Произведите умножение двух матриц а) ⋅, б)⋅.

**Самостоятельная работа.**

**Вариант 1.**

1. Найдите матрицу C = + 2В, если А= , В = .
2. Найдите: А ⋅ В – В ⋅ А, где А = , В = .
3. Вычислите: 3А ⋅ 2В, если А = , В = .
4. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Вариант 2.**

1. Найдите матрицу C = + 2В, если А= , В = .
2. Найдите: А ⋅ В – В ⋅ А, где А = , В = .
3. Вычислите: 3А ⋅ 2В, если А = , В = .
4. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?

**Практическое занятие № 11.**

**Тема: Вычислить определители**.- 2ч

**Цель:** Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

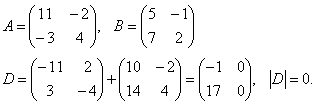
**по решению задач.**

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image020.gif. *Определителем второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: *a11a22 – a12a21*.

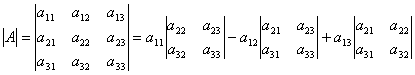
Определитель обозначается символом http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image091.gif.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали. **Примеры.** Вычислить определители второго порядка.

1. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image093.gif
2. http://www.toehelp.ru/theory/math/lecture12/l12image095.gif.
3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D= -А+2В* и

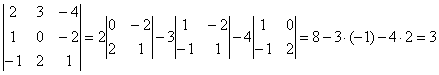


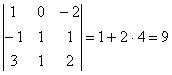
Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель. *Определителем третьего порядка*, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

.

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки *a11, a12, a13* и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

**Примеры.** Вычислить определитель третьего порядка.

1. .

2. 

**Задания для совместной работы.**

1. Вычислите определитель второго порядка .
2. Вычислите определитель третьего порядка .
3. Запишите все миноры определителя .
4. Найдите алгебраические дополнения , , для определителя .
5. Разложите определитель по:

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

1. Найдите обратную матрицу для матрицы А = .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется определителем матрицы?
2. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
3. Что называется минором?
4. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
5. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
6. Перечислите свойства определителя.
7. Какая матрица называется невырожденной?
8. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
9. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

**Практическое занятие №12.**

**Тема: Выполнить элементарные преобразования матрицы.**

**Цель:** Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

**Элементарные преобразования матрицы** — это такие преобразования матрицы, в результате которых сохраняется эквивалентность матриц, то есть, элементарные преобразования не изменяют множество решений системы линейных алгебраических уравнений, которую представляет эта матрица. Элементарные преобразования используются в методе Гаусса для приведения матрицы к треугольному или ступенчатому виду.

## Элементарными преобразованиями строк называют:

* перестановку местами любых двух строк матрицы;
* умножение на ненулевую константу любой строки матрицы;
* прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на ненулевое число.

Аналогично определяются элементарные преобразования столбцов.  ***Определение.*** Матрицы A и B называют **эквивалентными матрицами** если от матрицы A к матрице B перешли с помощью элементарных преобразований над строками и обозначают A ~ B.  **Примеры на элементарные преобразования матрицы**

***Пример 1.***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Используя элементарные преобразования строк преобразовать матрицу A в [верхнюю треугольную матрицу](http://ru.onlinemschool.com/math/library/matrix/type#h7), где A = | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 4 | 2 | 0 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF |
| 1 | 3 | 2 |
| -1 | 3 | 10 |

**Решение:** поменяем первую и вторую строку местами

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 4 | 2 | 0 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ |
| 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 0 |
| -1 | 3 | 10 | -1 | 3 | 10 |

ко 2-рой строке прибавим 1-вую, умноженную на -4; к третей строке прибавим первую

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ |
| 4 + (-4)·1 | 2 + (-4)·3 | 0 + (-4)·2 | 0 | -10 | -8 |
| -1 + 1 | 3 + 3 | 10 + 2 | 0 | 6 | 12 |

2-рую строку поделим на -2, третью строку делим на 6

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ |
| 0 | -10/(-2) | -8/(-2) | 0 | 5 | 4 |
| 0 | 6/6 | 12/6 | 0 | 1 | 2 |

поменяем вторую и третью строку местами

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ~ | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/LS.GIF | 1 | 3 | 2 | http://ru.onlinemschool.com/pictures/matrix/RS.GIF | ~ |
| 0 | 1 | 2 |
| 0 | 5 | 4 |

Элементарные преобразования матрицы можно выполнить, умножая её *слева* или *справа* на *элементарные матрицы* (элементарную матрицу перестановок, элементарную матрицу масштабирования и неунитарную элементарную матрицу).

*Элементарная матрица перестановок* P*ij*— квадратная матрица, которая получается перестановкой *i*-й и *j*-й строк единичной матрицы.

Перестановку *i*-й и *j*-й строк матрицы можно выполнить, умножая её *слева* на матрицу перестановок P*ij*. Перестановку *i*-го и *j*-го столбцов матрицы можно выполнить, умножая её *справа* на матрицу перестановок Pij.

*Элементарная матрица масштабирования* Ri (α) — квадратная матрица, которая отличается от единичной матрицы тем, что элемент, расположенный в *i*-й строке и *i*-м столбце равен α.

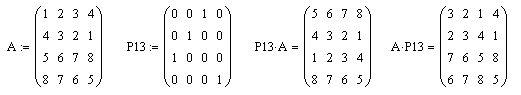
Умножение *i-*й строки матрицы на число α можно выполнить, умножая её *слева* на элементарную матрицу масштабирования Ri (α). Умножение *i*-го столбца матрицы на число α можно выполнить, умножая её *справа* на элементарную матрица масштабирования Ri (α).

*Элементарная неунитарная матрица* N*ij*(α) — квадратная матрица, которая отличается от единичной матрицы только элементом, расположенным в *i*-й строке и в *j*-м столбце; этот элемент матрицы N*ij*(α) равен числу α.

Сложение *i*-й строки матрицы с *j*-й строкой , умноженной на число α, можно выполнить, умножая ее *слева* на элементарную неунитарную матрицу N*ij*(α). Сложение *j*-го столбца матрицы с *i*-м столбцом , умноженным на число α, можно выполнить, умножая ее *справа* на элементарную неунитарную матрицу N*ij*(α) .

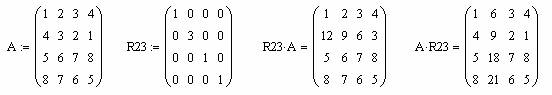
*Элементарная матрица перестановок* P13 получена перестановкой 1-й и 3-й строк единичной матрицы.

Перестановка 1-й и 3-й строк матрицы выполнена умножением матрицы *слева* на матрицу перестановок P13. Перестановка 1-го и 3-го столбцов матрицы выполнена умножением матрицы *справа* на матрицу перестановок P13:



*Элементарная матрица масштабирования* R23 отличается от единичной матрицы тем, что второй элемент главной диагонали равен 3.

Умножение 2*-*й строки матрицы на 3 выполнено умножением матрицы *слева* на элементарную матрицу масштабирования R23. Умножение 2-го столбца матрицы на 3 выполнено умножением матрицы *справа* на элементарную матрицу масштабирования R23.



### **Задания для самостоятельной работы:**

1. Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

**1.** **2.** **4.**

**Практическое занятие № 13.**

**Тема: Решение систем линейных уравнений** **Цель:**приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики*.* Проверка усвоения знаний по системам n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

***Обеспечение практической работы:***

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.

Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2008-380с.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Системы n линейных уравнений с n переменными».

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

***Метод Крамера.***

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0. det A ≠ 0; Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

***Теорема. (Правило Крамера):***

**Теорема.** *Система из n уравнений с n неизвестными*

**

*в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:xi = Δi/Δ, где*

*Δ = det A, а Δi – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов bi.*

*Δi = *

Пример. 

A = ; Δ1= ; Δ2= ; Δ3= ;

x1 = Δ1/detA; x2 = Δ2/detA; x3 = Δ3/detA;

Пример. Найти решение системы уравнений:



Δ = = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Δ1 =  = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30. x1 = Δ1/Δ = 1;

Δ2 =  = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60. x2 = Δ2/Δ = 2;

Δ3 =  = 5( 32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90. x3 = Δ3/Δ = 3.

Если система однородна, т.е. bi = 0, то при Δ≠0 система имеет единственное нулевое решение x1 = x2 = … = xn = 0. При Δ = 0 система имеет бесконечное множество решений.

**Задания для совместной работы.**

1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

а) б) в) г)

1. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера

**Индивидуальная самостоятельная работа.**

**Вариант – 1.**

**Вариант –2.** ;**Вариант –3**.;

**Вариант –4.**

;**Вариант –5.**;**Вариант –6.**;

**Вариант –7.**

;**Вариант –8.**;**Вариант –9.***;*

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
2. Матричная запись СЛАУ.
3. Решение СЛАУ по формулам Крамера
4. Методом обратной матрицы
5. Методом Гаусса.
6. Общее решение СЛАУ.
7. Однородные СЛАУ, свойства их решений.
8. Условия существования ненулевых решений однородных СЛАУ.

**Практическое занятие № 14.**

**Тема: Решение задач с комплексными числами.**

**Цель:**

1. Корректировать знания, умения и навыки по теме: «Решение задач с комплексными числами»*.*
2. Закрепить и систематизировать знания по теме.
3. Определить уровень усвоения знаний, оценить результат деятельности студентов.
   * + 1. **Необходимый теоретический материал**

Комплексным числом называется число вида z = a+bi, где a и b - действительные числа, а i – мнимая единица (i2 = -1).

Запись комплексного числа в виде z = a+bi называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Два комплексных числа z1 = a1+b1 i и z2 = a2+b2 i называются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные части и равны их мнимые части: a1 = a2, b1 = b2.

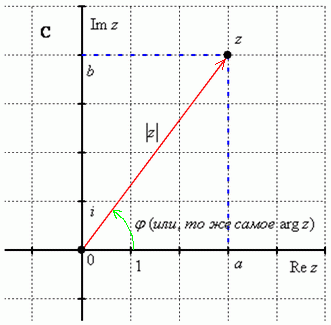
Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся.

Два комплексных числа вида z = a+bi и называются взаимно сопряжёнными

Комплексные числа вида a+bi и - a - bi называются противоположными.

Всякое комплексное число z = a+bi можно изобразить точкой М(а; в) плоскости Оxy и, наоборот, каждую точку координатной плоскости М(а; в) можно рассматривать как прообраз комплексного числа z = a+bi. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью.

Комплексное число z = a+bi можно так же изобразить в виде радиус – вектора



Длина вектора r = |z| = называется модулем комплексного числа.

Угол , образованный вектором c положительным направлением оси Ox называется аргументом комплексного числа:

Суммой комплексных чисел z1 и z2 называется число вида:

z1 + z2 = (a1+a2) + (b1 +b2)i

Разностью комплексных чисел z1 и z2 называется число вида:

z1 - z2 = (a1- a2) + (b1 - b2)i

Произведением комплексных чисел z1 и z2 называется число вида:

z1 •z2 = (a1a2 –b1b2) + (a1 b2 +a2 b1)i

Частным комплексных чисел z1 и z2 называется число вида:

* + - 1. **Примеры.**

Даны комплексные числа z1 = 1-2 i и z2 = 1+ i. Вычислить:

а) |z1| и |z2|;

б) z1 + z2;

в) z1 - z2;

г) z1 •z2;

д) .

Решение:

а) |z1|= = ;

|z2| =

б) z1 + z2 =

в) z1 - z2 =

г) z1 •z2 =

д)

* + - 1. **Задания к практической работе.**

Даны комплексные числа z1 и z2. Вычислить:

а) |z1| и |z2|; б) z1 + z2; в) z1 - z2; г) z1 • z; д) .

**В а р и а н т 1**

1. z1 = 5 - i и z2 = 1+3 i;
2. z1 = - 1+3 i и z2 = 6 - 5 i.

**В а р и а н т 2**

1. z1 = 3 - 4 i и z2 = 1+ i;
2. 2) z1 = 5 - 2 i и z2 = -2 + i.

**В а р и а н т 3**

1. z1 = 7 - 2 i и z2 = 5+3 i;

2) z1 = - 5+ i и z2 = 1+2 i.

**В а р и а н т 4**

1) z1 = - 2+3 i и z2 = 5 - 4 i;

2) z1 = 6 - 5 i и z2 = 1+ i.

**Практическое занятие № 15**. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

**Цель:** отработка умений и навыков выполнения действий над комплексными

числами, заданными в тригонометрической и показательной формах.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:** Теоретический материал методической рекомендации к практической работе. Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012. Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

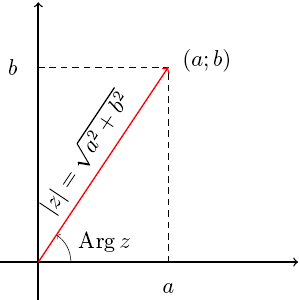
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Действия над комплексными числами».

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

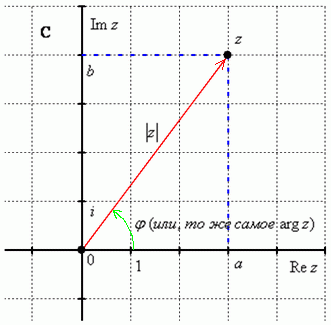
**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.** *Комплексное число* — это выражение вида *a* + *bi*, где *a*, *b* — действительные числа, а *i* — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен –1, то есть *i*2 = –1. Число *a* называется *действительной частью*, а число *b* — *мнимой частью* комплексного числа *z* = *a* + *bi*. Если *b* = 0, то вместо *a* + 0*i* пишут просто *a*. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел. Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу (*a* + *bi*) ± (*c* + *di*) = (*a* ± *c*) + (*b* ± *d*)*i*, а умножение — по правилу (*a* + *bi*) · (*c* + *di*) = (*ac* – *bd*) + (*ad* + *bc*)*i* (здесь как раз используется, что *i*2 = –1). Число http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a* – *bi* называется *комплексно-сопряженным* к *z* = *a* + *bi*. Равенство *z* · http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form1_12.gif = *a*2 + *b*2 позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

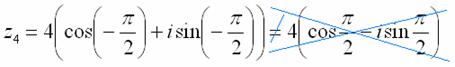
http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form2_493.gif

У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число *z* = *a* + *bi* можно изображать вектором с координатами (*a*; *b*) на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами (*a*; *b*) равна http://elementy.ru/images/posters/complexnumbers_form4_85.gif. Эта величина называется *модулем* комплексного числа *z* = *a* + *bi* и обозначается |*z*|. Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа *z* и обозначается Arg *z*. Любое комплексное число (кроме нуля) http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0002.gif можно записать в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image145.gif, где http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image147.gif – это **модуль комплексного числа**, а http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149.gif – **аргумент комплексного числа**. Изобразим на комплексной плоскости число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image008_0003.gif. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image152.gif:



**Модулем комплексного числа** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0002.gif называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом. Модуль комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0003.gif стандартно обозначают: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image147_0000.gif или http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image158.gif По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image160.gif. Данная формула справедлива **для любых** значений «а» и «бэ». ***Примечание****: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия*[***модуля действительного числа***](http://www.mathprofi.ru/goryachie_formuly.pdf)*, как расстояния от точки до начала координат.* **Аргументом комплексного числа** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0004.gif называется **угол** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149_0000.gif между положительной полуосью действительной оси http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image016_0003.gif и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image163.gif. Аргумент комплексного числа http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image006_0005.gif стандартно обозначают: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image149_0001.gif или http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image165.gif Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image167.gif. Запомним, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**. 1) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image169_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image180.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image182.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image184.gif (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image186.gif. Ясно, обратное проверочное действие: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image188.gif 2) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image171_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image191.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image193.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image195.gif (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме:

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):  
http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image199.gif 3) Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image173_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image202.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image204.gif.  
Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image206.gif (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом. Таким образом, число в тригонометрической форме: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image208.gif. Проверка: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image210.gif 4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image175_0000.gif. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image213.gif. Формальный расчет по формуле: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image215.gif. Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image217.gif (270 градусов), и, соответственно: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image219.gif. Проверка: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image221.gif

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image223.gif (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image217_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image223_0000.gif – это один и тот же угол. Таким образом, запись принимает вид: http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image226.gif **Внимание!** Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:  


*Пример:* ***Решение:***  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image299.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image301.gifhttp://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image303.gif*  
*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image305.gif*

*Пример :* ***Решение:*** http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image333.gifhttp://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image335.gifhttp://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image337.gif, http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image339.gif  
*Разложим квадратный двучлен на множители:*http://www.mathprofi.ru/h/kompleksnye_chisla_dlya_chainikov_clip_image341.gif

**Самостоятельная работа.**

**Вариант – 1.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)+i б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 2.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 3.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Вариант – 4.**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) б)

1. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) +i б) +i

1. Даны комплексные числа и (

Найти: а) б) ; в) .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.

1. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
3. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
6. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
8. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?
10. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
12. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

**Практическое занятие №16.** Решение задач комбинаторики

**Цели:**

* Освоить механизм решения простейших комбинаторных задач;
* Развивать логическое мышление, память, внимание и самостоятельность.

**Теоретическая часть.**

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух основных правил – **правила суммы и правила произведения**.

|  |  |
| --- | --- |
| **Выбор правила** | **Выбор правила** |
| **Правило суммы** | **Правило произведения** |
| Если некоторый объект А можно выбрать **m** способами, а другой объект В можно выбрать **n** способами, то выбор объекта либо А, либо В можно осуществить **m + n** способами. | Если объект А можно выбрать **m** способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать **n** способами, то выбор пары А и В можно осуществить **m · n**способами. |

**Задача 1.**

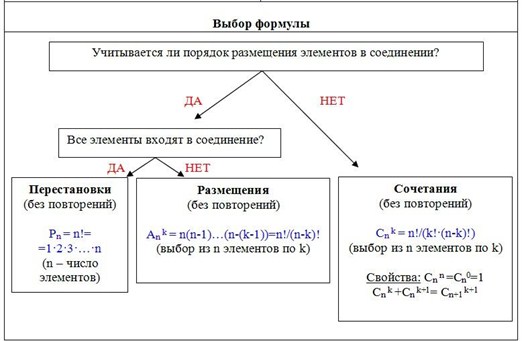
**В магазине «Все для чая» есть 6 разных чашек и 4 разных блюдца. Сколько вариантов чашки и блюдца можно купить?**

***Решение*.**

Чашку мы можем выбрать 6-ю способами, а блюдце 4-я способами. Так как нам надо купить пару чашку и блюдце, то это можно сделать 6 · 4 = 24 способами (по правилу произведения).

***Ответ: 24.***

Для успешного решения комбинаторных задач надо еще и правильно выбрать формулу, по которой искать количество нужных соединений. В этом поможет следующая схема.



Рассмотрим решение нескольких задач на разные виды соединений без повторений.

**Задача 2.**

**Найдите количество трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числе повторяться не могут.**

***Решение.***

Для выбора формулы выясняем, что для чисел, которые мы будем составлять, порядок учитывается и не все элементы одновременно выбираются. Значит, это соединение – размещение из 7 элементов по 3. Воспользуемся формулой для числа размещений: A73 = 7(7 – 1)(7 – 2) = 7 · 6 · 5 = 210 чисел.

***Ответ: 210.***

**Задача 3.**

**Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых все цифры разные, а номер не может начинаться с нуля?**

***Решение.***

На первый взгляд эта задача такая же, как и предыдущая, но сложность в том, что надо не учитывать те соединения, которые начинаются с нуля. Значит необходимо из существующих 10-ти цифр составить все семизначные номера телефонов, а потом от полученного числа отнять количество номеров, начинающихся с нуля. Формула будет иметь вид:

A107– A96 = 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 – 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 = 544 320.

***Ответ: 544 320.***

**Задача 4.**

**Сколькими способами можно расставить на полке 12 книг, из которых 5 книг – это сборники стихотворений, так, чтобы сборники стояли рядом?**

***Решение.***

Сначала примем 5 сборников условно за одну книгу, потому что они должны стоять рядом. Так как в соединении существенным есть порядок, и все элементы используются, значит  это перестановки из 8 элементов (7 книг + условная 1 книга). Их количество Р8. Далее будем переставлять между собой только сборники стихотворений. Это можно сделать Р5 способами. Поскольку нам нужно расставить и сборники, и другие книги, то воспользуемся правилом произведения. Следовательно, Р8· Р5= 8! · 5!. Число способов будет большим, поэтому ответ можно оставить в виде произведения факториалов.

***Ответ: 8! · 5!***

**Задача 5**.

**В классе 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории возле школы нужно 4 мальчика и 3 девочки. Сколькими способами можно их выбрать со всех учеников класса?**

***Решение.***

Сначала отдельно выберем 4 мальчика из 16 и 3 девочки из 12. Так как порядок размещения не учитывается, то соответственные соединения – сочетания без повторений. Учитывая необходимость одновременного выбора и мальчиков, и девочек, используем правило произведения. В результате число способов будет вычисляться таким образом:

С164 · С123 = (16!/(4! · 12!)) · (12!/(3! · 9!)) = ((13 · 14 · 15 · 16) / (2 · 3 · 4)) ·((10 · 11 · 12) / (2 · 3)) = 400 400.

***Ответ: 400 400.***

Таким образом, успешное решение комбинаторной задачи зависит от правильного анализа ее условия, определения типа соединений, которые будут составляться, и выбора подходящей формулы для вычисления их количества.

1. **Вычислить.**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **1.1** | **2.1** | **3.1** |
| **1.2** | **2.2** | **3.2** |
| **1.3** | **2.3** | **3.3** |

1. **Решить задачу.**

**2.1** Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв  слова «АРБУЗ»?

**2.2** Сколько различных слов, даже  бессмысленных можно образовать, представляя буквы «АРБУЗ»?

**2.3** Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 2;4;6;7;9?

**2.4** Сколько трехбуквенных слов можно образовать из букв слова «ПЕРСИК» ?

**2.5** Сколько различных слов, даже бессмысленных, можно образовать представляя буквы «ПЕРСИК» ?

**2.6** Сколько трехзначных чисел  можно составить из цифр 2;3;4;5;6?

**2.7**В шахматном турнире участвуют 16 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?  
  
**2.8** В хоровом кружке занимаются 9 человек. Необходимо выбрать двух солистов. Сколькими способами это можно сделать?

* 1. В спортивной команде 9 человек. Необходимо выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

**2.10** Сколько существует вариантов рассаживания вокруг стола 6 гостей на 6 стульях?

**2.11** Сколькими способами 10 футбольных команд могут разыграть между собой золотые, бронзовые и серебряные медали?

**2.12** В магазине продаются блокноты 7 разных видов и ручки 4 разных видов. Сколькими разными способами можно выбрать покупку из одного блокнота и одной ручки?

**Практическое занятие № 17.**

**Тема**: Вычисление числовых характеристик.

**Цель:** отработка умений и навыков в решении комбинаторных задач. Уметь вычислять вероятность событий. Научить применять вероятностные методы для решения практических задач.

***Задачи:***

• развитие творческого профессионального мышления;

• познавательная мотивация;

• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;

• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;

• углубление теоретической и практической подготовки;

• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

**Обеспечение практического занятия:**

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

***Ход практического занятия.***

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

**›** Изучить теоретический материал по теме «Решение комбинаторных задач, вычисление вероятностей событий. Решение практических задач с применением вероятностных методов.»

**›** Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

**›** Выполнить самостоятельную работу №10.

**›** Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации**

**по решению задач.**

**Основы комбинаторики.**

Комбинаторика, это раздел математики в котором изучается вопрос о том, сколько

различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям можно составить из

конечного числа различных элементов.

Комбинации, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком

называются соединениями различают три вида соединений.

Предварительно познакомимся с понятием факториала.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до включительно, называют - факториалом и пишут

Размещениями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-элементам, которые отличаются друг от друга либо составом элементов либо их порядком. http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image001.gif

Перестановки называют соединения составленные из одних и тех же n-элементов,

которые отличаются друг от друга только их порядком размещения http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image002.gif http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image003.gif

Сочетаниями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-

элементам, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image004.gif

Сочетания с повторениями это такие соединения состоящие из n-различных элементов по m-элементам отличающиеся друг от друга или хотя бы одним элементом или тем что хотя бы один элемент входит различное число раз http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image005.gif

**Правило суммы**

Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов М способами, а объект В N способами, то выбор либо объекта А либо объекта В может быть осуществлен М+N способами.

**Правило произведения**

Если объект А может быть выбран из совокупности объектов М способами, а после такого выбора объект В может быть выбран N способами, то пара объектов А и В могут быть выбраны А\*В способами.

**Основные понятия теории вероятностей**

Событием называется любой исход опыта, различают следующие виды событий:

- случайные

- достоверные

- невозможные

Понятие достоверного и невозможного события используется для количественной оценки возможности появления того или иного явления, а с количественной оценкой связана вероятность.

События называется **несовместными** в данном опыте если появление одного из них исключает появление другого.

События называется **совместными** если появление одного из них не исключает появление остальных.

Несколько событий образуют **полную группу** событий если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Если два несовместных события образуют полную группу они называются **противоположными**

События называется **равновозможными** если появление ни одного из них не является объективно более возможным чем другие.

 Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

Вероятностью события A называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу  
   Два события называются равновероятными (или равновозможными), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.    Так, например, появления герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.  
Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.  
Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству .

Пример. В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

Решение. Пусть событие А = (Номер вынутого шара не превосходит 10). Число случаев благоприятствующих появлению события А равно числу всех возможных случаев m=n=10. Следовательно, Р(А)=1. Событие А достоверное

События называются **неравновозможными** если появление хотя бы одного из них является более возможным чем другие.

**Случаями** называются несовместные равновозможные и образующие полную группу события.

**Вычисление вероятностей**

1. классический способ

2. геометрический

3. статистический

Первые два способа называются способами непосредственного подсчета вероятности, а классический основан на подсчете числа опытов благоприятствующих данному событию среди всех его возможных исходах.

**Основы теории вероятности**

Суммой событий Аi называется событие С состоящее в появлении события А или события В или их обоих вместе.

Суммой события А и В называется событие С заключенное в выполнении хотя бы одного из названых событий.

Произведением нескольких событий называется событие заключающееся в совместном выполнении всех этих событий.

**Теорема умножения вероятностей**.

Событие А называется зависимым от события В если его вероятность меняется в зависимости от того произошло событие В или нет.

Для независимых событий условная и безусловная вероятность совпадают.

Вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятностей

одного из них на вероятность другого вычисленную при условии, что первое событие имело место.

Р(А\*В)=Р(А)\*Р(В/А)=Р(В)\*Р(В/А)

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место. Р(А1;А2.Аn)=Р(А1)\*Р(А2/А1)\*. \*Р(Аn/А1,А2.Аn-1)

**Теорема сложения вероятностей совместных событий**

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих

событий без вероятности их совместного появления.

Р(А)+Р(В)=Р(А)+Р(В)-Р(А\*В)

**Вероятность появления хотя бы одного события**

Вероятность появления события А заключающееся в наступлении хотя бы одного из независимых совокупностей событий .А1,А2.Аn равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий А1,А2.Аn Р(А)=1-q1\*q2\*.\*qn

**Формула полной вероятности**

Пусть событие А может появиться вместе с одним из образующих полную группу попарнонесовместных событий Н1,Н2.Нn называемых гипотезами, тогда вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на вероятность события А при этой гипотезе http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image006.gif

**Формула Бейса**

Пусть имеется полная группа попарнонесовместных гипотез Н1,Н2

.Нn с известными вероятностями появления. В результате проведения

опыта появилось некоторое события А, требуется переоценить вероятности гипотез

при условии, что событие А произошло

http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image007.gif

**Повторение опытов**

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность одного или иного

из исходов каждого их опытов не зависит от того какие исходы имели другие

опыты.

**Теорема.** Если производится n независимых опытов в каждом из которых

событие А появляется с одинаковой вероятностью р, причем то тогда вероятность

того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле.

Формула Бернули

http://works.tarefer.ru/50/100080/pics/image008.gif

формула Бернули применяется в тех случаях, когда число опытов невелико, а

вероятности появления достаточно велики.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ.

**Задача №1**. В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

Решение: Рассмотрим событие А – оба вынутых шара белого цвета. Число всевозможных исходов равно количеству выборок 2 шаров из 10. Выборка без возвращения и без повторения, поэтому http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1267.gif. Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно числу вариантов извлечения 2 белых шаров из 6, поэтому http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1268.gif. Тогда http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1269.gif.

Ответ: http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1270.gif.

**Задача №2.** В секретном замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

Решение: Рассмотрим событие А – замок будет открыт. Это событие равносильно тому, что цифры на дисках составляют определенное число. Так как варианты набора цифр на дисках образуют выборку с возвращением (цифры могут повторяться) упорядоченную (при смене порядка цифр получается другое число), http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1271.gifБлагоприятный исход у этого события только один, поэтому *m = 1.* Тогда http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1272.gif

**Задача №3.** Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Пусть событие А – набран верный номер. Тогда число всевозможных исходов равно числу трехзначных чисел, составленных из различных цифр. Так как в этом случае мы имеем выборку без возвращения (цифры различны), но упорядоченную (меняя цифры местами, получаем новое число), то http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1273.gifИсход, благоприятствующий наступлению события А только 1. Поэтому http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1274.gif

**Задача №4.** В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки различны?

Решение: Пусть событие А - все проданные открытки различны. Тогда число всевозможных исходов равно числу вариантов выбора 4 открыток. Эта выборка с возвращением (выбранные открытки могут быть одинаковые), неупорядоченная (так как важен лишь состав выборки, а не то, в каком порядке отобраны открытки). Значит http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1275.gifЧисло исходов, благоприятствующих наступлению события А, есть число способов, которыми можно выбрать 4 различные открытки из 6 видов. Так как открытки теперь различны, то эта неупорядоченная выборка без повторения, значит http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1276.gifТогда http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1277.gif Ответ: http://festival.1september.ru/articles/419226/Image1278.gif **Проверочные задания для практического занятия. Вариант – 1.** Вычислите: а) ; в) ; г) .

1. Решите уравнения: а) ; б) в) .
2. Проверьте равенства: а) ; б) .

**Вариант – 2.**

1. Вычислите: а) ; в) ; г) .
2. Решите уравнения: а) ; б) в) .
3. Проверьте равенства: а) ; б) .

**Вариант – 3.**

1. Вычислите: а) ; в) ; г) .
2. Решите уравнения: а) ; б) в) .
3. Проверьте равенства: а) ; б) .

**Вариант – 4.**

1. Вычислите: а) ; в) ; г) .
2. Решите уравнения: а) ; б) в) .
3. Проверьте равенства: а) ; б) .

**Контрольные вопросы по теме.**

1. Что называется, n-факториалом?
2. Перечислите основные задачи комбинаторики.
3. Что называется, перестановками?
4. Запишите формулу для числа перестановок из m элементов.
5. Что называется, размещениями?
6. Запишите формулу числа размещений из m элементов по n.
7. Что называется, сочетаниями?
8. Запишите формулу числа сочетаний из m элементов по n.
9. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
10. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
11. Что называется, вероятностью события?
12. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
13. Чему равна сумма несовместных событий?
14. Какие события, называются противоположными? Приведите примеры.
15. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
16. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
17. Какая величина называется случайной?
18. Какая случайная величина называется дискретной?
19. Что называется, законом распределения случайной величины?
20. Какой закон распределения называется биномиальным?
21. Что называется, математическим ожиданием дискретной случайной величины?
22. Что называется, дисперсией случайной величины?

|  |
| --- |
|  |
|  |

**Список рекомендуемой литературы**

1. Аргунова Т.Г. Организация самостоятельной работы студентов средних специальных учебных заведений / Аргунова Т.Г.—М.: НПЦ «Профессионал-Ф», 2003.
2. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала анализа. 10 (11) кл. – М., 2012.
3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия. 10 (11) кл. – М., 2012.
4. Скакун В.А. Преподавание Общетехнических и специальных предметов в училищах профтехобразования: Профпедагогика. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш.школа, 1980.232с., с ил.
5. Гусева Р.П. Методическая готовность преподавателей к созданию комплексного учебно-методического обеспечения образовательного процесса.// Среднее профессиональное образование, 2003, №3.
6. Аргунова Т.Г. Комплексное учебно-методическое обеспечение предмета. М., 1999.
7. Кочетов С.И. Комплексное методическое обеспечение учебного процесса средствами обучения. – М.: Высшая школа, 1986.
8. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М: Наука, 1976.
9. Садовников В.А. Комплексное учебно-методическое обеспечение и содержание дисциплины регионального компонента.// Среднее профессиональное образование, 2003, №11.
10. Щепотин А.Ф., Чекулаев М.А., Сосонко В.Е., Шеховцев А.П. Комплексное учебно-методическое обеспечение образовательного процесса в средних профессиональных учебных заведениях. М.: ИПР СПО, 2002.